Nom : toutou / Sidi Mahmoud.

Exercice 5

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n>0$ par:

$$U_1=-1;\quad U_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}U_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)};$$

1) Calculer U_2, U_3.

2) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.

3) Déterminer le sens de variation de (U_n) ; démontrer qu'elle converge puis déterminer sa limite.

4) Pour tout $n>0$ on pose $V_n=(3-U_n)n$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; écrire V_n en fonction de n.

b) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et calculer $S_n=V_1+V_2+\cdots+V_n$.

Solution :

1)- $n=1 \Rightarrow U_2=\frac{1}{4}U_1+3\left(\frac{3}{4}\right)$

$U_2=\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{9}{4}$

$U_2=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{U_2=2}$

. $n=2 \Rightarrow U_3=\frac{2}{6}U_2+\frac{12}{6}$

$U_3=\frac{1}{3}\times(2)+\frac{6}{3}$

$U_3=\frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{U_3=\frac{8}{3}}$

2)- Montrons par recurrence que pour tout $n\geqslant 1$; $U_n\leqslant 3$

$\boxed{1}$ pour $n=1$; $U_1=-1 \Rightarrow U_1\leqslant 3$

$\boxed{2}$ on suppose que $U_n\leqslant 3$ $\forall_n\geqslant 1$

et on montre que $U_{n+1}\leqslant 3$

D'aprés l'hypothése, en multipliant par $\frac{n}{2(n+1)}$

$$\frac{n}{2(n+1)}U_n\leqslant\frac{3n}{2(n+1)}$$

on ajoute $\dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$$\underbrace{\frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}}_{U_{n+1}} \leqslant \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$\leqslant \frac{3n+3n+6}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} \leqslant \frac{6n+6}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} \leqslant \frac{6(n+1)}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} \leqslant 3$$

$\boxed{3}$ on conclut que pour tout $n \geqslant 1$: $\boxed{U_n \leqslant 3}$

Alors (U_n) est majourée par 3.

3)- On determine le singe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - U_n$$

$$= \left(\frac{n}{(2n+1)} - 1\right)U_n + \frac{3(n+2)}{}$$

$$= \frac{n-2n-2}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-n-2}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)}(-U_n + 3)$$

On sait que $\dfrac{n+2}{2(n+1)} > 0$ car $n \geqslant 1$

et que $-U_n + 3 \geqslant 0$ car (U_n) est majorée par 3

Donc $\dfrac{n+2}{2(n+1)}(-U_n + 3) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

D'ou (U_n) est croissante

* (U_n) converge car elle est croissante est majorée.

$V_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$V_n = \frac{2^2}{2^{n-1}} \Rightarrow \boxed{V_n = \frac{1}{2^{n-3}}}$

4.b) - On a $V_n = (3 - U_n) \cdot n$

$\Rightarrow 3 - U_n = \frac{1}{n} V_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

car $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 1 > U_n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (3 - U_n) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3}$

même resultat trouvée en 3

$* S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

$= V_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$

$S_n = 4 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1/2}$

$\Rightarrow \boxed{S_n = 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$.

Nom : toutou / Sidi Mahmoud

$\boxed{\text{Suite Exo 5}}$

* Soit ℓ la limite de (u_n). Alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

par passage aux limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$\ell = \frac{1}{2}\cdot\ell + \frac{3}{2} \Rightarrow 2\ell = \ell + 3$$

$$\Rightarrow \ell = 3 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}$$

4a) - $V_{n+1} = (3 - u_{n+1})(n+1)$

$$V_{n+1} = \left(3 - \frac{n}{2(n+1)} u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)(n+1)$$

$$= \left(3n + 3 - \frac{n}{2} u_n - \frac{3}{2}(n+2)\right)$$

$$= \left(3n - \frac{3}{2} n + \cancel{3} - \cancel{3} - \frac{n}{2} u_n\right)$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{n}{2} u_n$$

$$= \frac{n}{2}(3 - u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(3 - u_n)\cdot n$$

$$= \frac{1}{2} V_n \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} V_n}$$

Alors V_n est une suite géométrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{2}}$

· V_n en fonction du n :

$V_n = V_1 \cdot q^{n-1}$

$V_1 = (3 - u_1) \times 1 = 3 - (-1) = 4$

Nom : toutou / sidi Mahmoud

Exercice 10 :

Exercice 10 Bac 2010

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $z_D = 3$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Solution :

1- pour tout nombre complexe z on pose : $p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

a). pour calculer p(3) on remplace dans l'expression de p(z) :

$p(3) = 3^3 - 3^2 - 4(3) - 6 = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$

donc $p(3) = 0$

b)- pour déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a :

$p(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser une identification ou une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - z^2 - 4z - 6 & z - 3 \\ \cline{2-2} -z^3 - 3z^2 & z^2 + 2z + 2 \\ \cline{1-1} 0 \quad 2z^2 - 4z - 6 & \\ -2z^2 - 6z & \\ \cline{1-1} 0 \quad 2z - 6 & \\ -2z + 6 & \\ \cline{1-1} 0 \quad 0 & \end{array}$$

on en deduit que $p(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$, soit $a = 2$ et $b = 2$

c)- pour résoudre l'équation $p(z) = 0$

$z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

Soit $z^2+2z+2=0$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$(2)^2 - 4(1)(2)$

$4 - 8 = -4$

Donc $\Delta = -4 = (2i)^2$

les solution sont $z_1 = \frac{-2-2i}{2\times 1} = \frac{-2-2i}{2} = z_1 = \boxed{-1-i}$

$z_2 = \frac{-2+2i}{2\times 1} = \frac{-2+2i}{2} = \boxed{-1+i} \Rightarrow \boxed{z_2 = -1+i}$

Alors l'ensemble de solution de l'equation $p(z)=0$ est :

$S\{3, -1+i, -1-i\}$

2)- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$;

a)- pour placer les points A, B, C et D on'a :

$z_A = 3+2i \Longrightarrow A(3;2)$

$z_B = -1+i \Longrightarrow B(-1;1)$

$z_C = -1-i \Longrightarrow C(-1;-1)$

$z_D = 3 \Longrightarrow D(3;0)$

b) L'affixe du milieu de [AC] est égale à :

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i-1-i}{2}$

$= \frac{2+i}{2} = 1+\frac{1}{2}i$

• l'affixe du milieu de [BD] est égale à :

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i-1-i}{2}$

$= \frac{2+i}{2}$

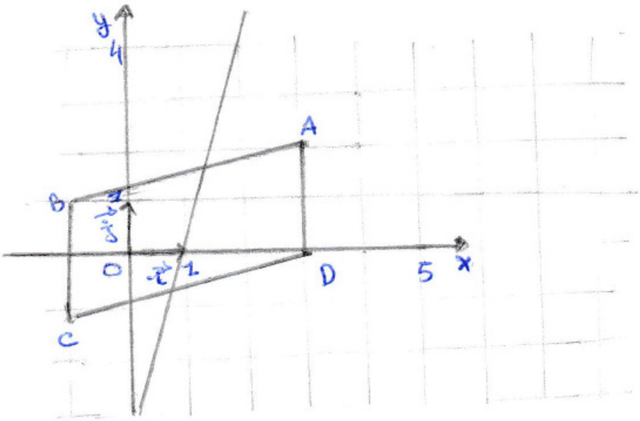
$= \boxed{1+\frac{1}{2}i}$

• L'affixe du milieu de [BD] est égale à :

$\frac{z_B+z_D}{2} = \frac{3-1+i}{2} = \frac{2+i}{2} = 1+\frac{1}{2}i$

Nom : toutou / Sidi Mahmoud.

Suite Bac 2010



On constate que les milieux des segments [AC] et [BD] ont le même milieu. Donc le quadrilatatère ABCD est un parallélogramme.

d) soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que

$|z-3| = |z+1-i|$

• Alors $M \in \Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$

• Alors Γ est la médiatrice du segment [BD]

Remarque :

En utilisant la forme algebrique $z = x + iy$ on trouve que Γ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que :

$|x-3+iy| = |x+1+(y-1)i|$

Aprés le calcule des modules et la simplification on obtient une équation cartésienne de Γ : $8x - 2y - 7 = 0$

c'est l'équation d'une droit qu'on peut représenter facilement. On peut verifier que c'est la mediatrice du segment [BD].

Fin

Nom : toutou / Sidi Mahmoud

Exercice : 1

On considère les nombres complexes $a = \sqrt{2}(1+i)$, $b = \sqrt{3}+i$ et $c = a^3.b$

1.) Ecrire c sous forme algébrique.

2.) - Determiner le module et un argument de chacun des nombres a et b. En deduire le module et un argument de c.

3.) - Deduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Solution :

$a = \sqrt{2}(1+i)$; $b = \sqrt{3}+i$ et $c = a^3.b$

1). c sous forme algébrique :

$c = a^3.b = (\sqrt{2})^3(1+i)^3(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(1+i)(1+i)^2(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(1+i)(2i)(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(2i-2)(\sqrt{3}+i)$

$c = 2\sqrt{2}(2i\sqrt{3}) = (2-2\sqrt{3}-2i)$

$c = 2\sqrt{2}(-2-2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-2)i$

donc $c = 2\sqrt{2}(-2-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)i$

2). Le module et l'argument de a et b

$|a| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |a| = 2$

$|b| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$|c| = |a|^3.|b| = 2^3 \times 2 = 2^4$

donc $\arg a = \frac{\pi}{4}$ et $\arg b = \pi/6$

$\arg c = \arg(a^3.b)$

$\arg a^3 + \arg b$

$= 3 \arg a + \arg b$

$3 \cdot \frac{\pi}{4} + \pi/6$

$= \frac{9\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}$

$\Rightarrow \boxed{\arg c = \frac{11\pi}{12}}$

D'apres le forme algebrique de c , on a :

$|c| = 2^4 = 16$

$\arg c = \frac{11\pi}{12}$

$c = 2\sqrt{2}\,(-2 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}\,(-2 + 2\sqrt{3})\,i$

3) les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

- $\boxed{\cos \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2}\,\frac{(-2 - 2\sqrt{3})}{16} = \sqrt{2}\,\frac{(-1 - \sqrt{3})}{4}}$
- $\sin \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2}\,\frac{(-2 + 2\sqrt{3})}{16} = \sqrt{2}\,\frac{(-1 + \sqrt{3})}{4}$

Nom : toutou/Sidi Mahmoud.

Exercice1:

Exercice 1

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) tels que:

$a_n = U_n + V_n$; $b_n = U_n - V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Solution :

1)- $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$; $V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

$* \; a_n = U_n + V_n = \dfrac{2^n - \cancel{4n} + \cancel{3} + 2^n + \cancel{4n} - \cancel{3}}{2}$

$a_n = \dfrac{2^n + 2^n}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2^n}$

du type q^n, donc (a_n) est une S.G de raison $\boxed{q = 2}$

$* \; b_n = U_n - V_n = \dfrac{\cancel{2^n} - 4n + 3 - \cancel{2^n} - 4n + 3}{2}$

$b_n = \dfrac{-8n + 6}{2} \Rightarrow \boxed{b_n = -4n + 3}$

du type $\alpha n + \beta$ donc (b_n) est une S.A de raison $\boxed{r = -4}$

2)- $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

On peut remarque que $\begin{cases} 2U_n = a_n + b_n \\ 2V_n = a_n - b_n \end{cases}$

$U_n = -\frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $V_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

$S_n = U_0 + V_1 + \cdots + U_n$

Donc $S_n = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) + \frac{1}{2}(a_1 + b_1) + \cdots + \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots\cdots + a_n + b_n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\underbrace{(a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_n)}_{\text{Somme S.G}} + \underbrace{(b_0 + b_1 + \cdots\cdots + b_n)}_{\text{Somme S.A}}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n+1}{2}(b_0 + b_n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n+1}{2}(3 - 4n + 3)\right]$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[1 + 2^{n+1} + (n+1)(3-2n)\right]}$$

$$S'_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$$

$$S'_n = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) + \frac{1}{2}(a_1 - b_1) + \cdots\cdots + \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{2}\left[a_0 + a_1 + \cdots\cdots + a_n - (b_0 + b_1 + \cdots\cdots b_n\right]$$

En utilisent les calcules precedents, on obtient

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{2}\left[-1 + 2^{n+1} - (n+1)(3-2n)\right]}$$